

文章编号: 1000-8055(2006)06-1103-06

基于优化拟形的航空发动机控制器降阶方法

李秋红, 孙健国, 许光华

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 提出了一种基于优化输出拟形的航空发动机多变量控制器降阶方法, 并以 LQG/LTR 控制器降阶为例, 成功地将原控制器从 8 阶降为 3 阶。首先将控制器分为积分环节部分和稳定子系统部分, 采用输出拟形的方法用低阶系统去逼近稳定子系统使二者具有相近的阶跃响应, 利用遗传算法优化出低阶系统的参数, 将低阶系统和分离出来的积分环节合并后即得到降阶后的控制器。与采用平衡截取 Schur 降阶方法比较, 本方法可将系统阶次降得更低并取得更好的动态响应效果。

关 键 词: 航空、航天推进系统; 航空发动机; 模型降阶; 输出拟形; 遗传算法; 优化
中图分类号: TP273; V233.7 **文献标识码:** A

Model reduction method based on optimization shaping for aero-engine controller

LI Qiu-hong, SUN Jian-guo, XU Guang-hua

(College of Energy & Power Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The model reduction method for aero-engine controller based on the optimization output shaping is presented in this paper. Using the LQG/LTR controller as an example, the 8th order LQG/LTR controller is successfully reduced to a 3th order system with this method. First the controller is divided into the integral part and the stable part. A lower order system is used to approach the stable part. With the optimization output shaping method, the lower order system parameters can be calculated using genetic algorithm (GA). Then the step response of them is very close to each other. At last, combining the optimized lower order system with the separated integral part, the reduced order controller can be obtained. Compared with the balanced truncation Schur model reduction method, this method can make the system with lower order and get better dynamic performance.

Key words: aerospace propulsion system; aero-engine; model reduction; output shaping; genetic algorithm; optimization

随着现代航空发动机工作范围的不断扩大, 同时要求在全飞行包线内都具有满意的性能。在

这种情况下, 采用单变量控制是不可能实现这些要求的, 必须采用更多的控制变量控制发动机更

收稿日期: 2005-11-22; 修订日期: 2006-05-08

基金项目: 国家自然科学基金资助(50576033); 航空科学基金资助(04C52019)

作者简介: 李秋红(1972-), 女, 辽宁绥中人, 在读博士, 讲师, 主要研究方向为航空发动机建模研究, 多变量鲁棒控制, 先进优化理论研究。

多的参数。常用的多变量鲁棒控制方法包括 LQG 控制、LQG/LTR 控制、ZP/LTR 控制及 H_∞ 控制等。这些控制方法为了减小或消除稳态误差,大都对原被控对象进行了增广。因此所设计的控制器阶次偏高,难于实现或会影响系统的实时性。为此对高阶控制器进行降阶研究就显得尤为必要。

控制系统模型降阶方法可分为两大类:一类是基于传递函数的频域模型降阶方法;一类是基于状态空间的时域模型降阶方法。基于传递函数的频域模型降阶方法有帕德近似法,连分式法,主导模态法,劳斯稳定性降阶方法,频率拟合降阶法,最优降阶法等。基于状态空间的时域模型降阶方法有集结分析法,奇异摄动法,平衡实现截取法,最优 Hankel 范数近似法等等。我们所要研究的降阶模型属于状态空间模型。

最早出现的基于状态空间的模型降阶方法当推基于平衡实现^[1-3]的模型方法,平衡后系统每个状态的可控性等于可观性,这使得降阶的过程在概念上变得更直观且更容易理解,从中我们看到系统降阶的本质就是去掉可控性和可观性相对弱的状态,因为它们在系统的输入输出特性中只是很弱的分量,容易满足降阶误差的要求。近年来又出现基于优化理论进行模型降阶的方法^[4-6]。

本文利用遗传算法来优化出一组降阶后的控制器参数,使得以这组参数构成的降阶系统与未降阶系统在阶跃输入作用下具有相近的响应过程。以 LQG/LTR 控制器的降阶为例。在 LQG/LTR 控制器的设计过程中为了减小或消除稳态误差,在两个控制回路中各串联了一个积分环节,针对一个 4 阶的被控对象,设计出的 LQG/LTR 控制器^[7]为 8 阶。本文在对 Schur 平衡截取降阶方法深入研究之后,将高阶控制器分为积分环节部分和稳定子系统部分^[8,9],将稳定子系统部分用输出拟形^{[10],[11]}的方式进行降阶处理。在输出拟形的过程中,采用遗传算法来确定二阶系统的时间常数,再将积分环节部分和降阶部分合并,成功将原控制器由 8 阶降为 3 阶。

1 降阶对象

以某型航空涡扇发动机(含执行机构)为被控对象,设发动机在中间状态, $H = 0 \text{ km}$, $Ma = 0$ 下的小偏差线性化模型^[12]为:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_p u_p \\ y_p = C_p x_p \end{cases} \quad (1)$$

其中,状态变量 $x_p = [N_f \ N_c \ W_f \ A_8]^T$ 、输出变量 $y_p = [N_f \ Pit]^T$ 、输入变量 $u_p = [W_{fc} \ A_{8c}]^T$, N_f 代表风扇转速, N_c 代表压气机转速, Pit 为涡轮落压比, W_f 为执行机构后的主燃油流量, A_8 为执行机构后的尾喷口面积, W_{fc} 和 A_{8c} 分别为执行机构前的主燃油流量信号和尾喷口面积信号。 x_p 、 y_p 、 u_p 均应理解为航空发动机各变量在平衡位置的偏差量,为简化起见,省略了增量符号 Δ 。

据此被控对象(见附录),采用文献[4]中 LQG/LTR 控制器设计方法,设计出可用于全飞行包线控制器为 8 阶,记为 (A_c, B_c, C_c) ,即为我们的降阶对象(见附录)。

我们所要研究的降阶对象在极点处有两个极点,从而开环不稳定,不便于利用输出拟形的方法直接进行降阶。为了有效地对含有积分环节的对象进行降阶处理,必须将积分环节和系统的稳定子系统分开,我们采用奇异值分解的方法来解决这一问题。

2 系统中积分环节的分离

考虑状态空间表示的线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times Q}$, $C \in \mathbb{R}^{P \times N}$, A 有 $N-M$ 个零特征根 ($1 \leq M \leq N$) 和 M 个负实部特征根。

设 A 有奇异值分解:

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T \quad (3)$$

其中 U 、 V 为正交矩阵, $\Sigma \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 为对角阵。于是:

$$V^T A V = V^T U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T V = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

若 $A_2 \neq 0$, 令:

$$F = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_1 A_2^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (5)$$

则

$$F^{-1} V^T A V F = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

若 $A_2 = 0$, 则 $F = I$ 。

又记 $T = VF$, 则有:

$$A_T = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}$$

$$B_T = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_0 \end{bmatrix},$$

$$C_T = CT = [C_1 \quad C_0] \quad (7)$$

其中 (A_1, B_1, C_1) 为稳定子系统,即 A_1 的特征值均有负实部; (A_0, B_0, C_0) 为系统的纯积分环节部分,即 A_0 特征值全为零。不难得出 $A_1 \in R^{M \times M}$, $B_1 \in R^{M \times Q}$, $C_1 \in R^{P \times M}$, $A_0 \in R^{(N-M) \times (N-M)}$, $B_0 \in$

$R^{(N-M) \times Q}$, $C_0 \in R^{P \times (N-M)}$ 。将前述降阶对象 (A_c, B_c, C_c) 用上述方法进行积分环节的分离。可得相应的积分环节部分: $A_0 = O_2 \times_2$, $B_0 = \begin{bmatrix} 0.678 & 167.28 \\ -0.95 & 13.94 \end{bmatrix}$, $C_0 = \begin{bmatrix} 0.029 & 4.035 \\ 10.364 & 8.399 \end{bmatrix}$ 稳定子系统部分

$$A_1 = \begin{bmatrix} -273.25 & -0.10 & -2.98 & -0.02 & -0.02 & -0.56 \\ -0.18 & -231.19 & 35.64 & 0.13 & 3.24 & 0 \\ -144.35 & 42.69 & -10.14 & -0.05 & -0.5 & -0.01 \\ 19183 & -817.74 & 156.88 & -7.39 & 0.02 & 0 \\ 1245.8 & -8689.9 & 43.429 & 0.77 & -0.1 & 0 \\ 51102 & 123.33 & -151.88 & 0.05 & 0.02 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.013 \\ 0 & 0.154 \\ 0.004 & 0.988 \\ 0.056 & -0.003 \\ -0.049 & 0.002 \\ 0.036 & 0.001 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} -1.18 \times 10^6 & -2329 \\ -1940.2 & 5.9 \times 10^5 \\ -14969 & -93720 \\ -99.472 & -330.98 \\ -100.51 & -8510.3 \\ -2881.3 & 9.486 \end{bmatrix}$$

$$[G_{122}(s) + G_{022}(s)]e_{pit}(s) \quad (10)$$

3 降阶目标函数的确定

将积分环节部分 (A_0, B_0, C_0) 转换为传递函数,对应于系统 (A_0, B_0, C_0) 的2个输入(e_{nf} e_{pit})和2个输出(W_{fc} A_{8c}),将会得到4个传递函数,记为 $G_{0ij}(s)$,下标0代表为积分环节部分, j 代表第 j 个输入 $j=1,2$, i 代表第 i 个输出 $i=1,2$,后面出现的下标 i, j 与此同义。则:

$$G_{011}(s) = \frac{W_{fc01}(s)}{e_{nf}(s)} = \frac{3.8542}{s}$$

$$G_{012}(s) = \frac{W_{fc02}(s)}{e_{nf}(s)} = \frac{-51.4025}{s}$$

$$G_{021}(s) = \frac{W_{8c01}(s)}{e_{nf}(s)} = \frac{-0.95895}{s}$$

$$G_{022}(s) = \frac{W_{8c02}(s)}{e_{nf}(s)} = \frac{1850.8465}{s} \quad (8)$$

对于稳定的子系统 (A_1, B_1, C_1) ,采用输出拟形的方法进行降阶。首先将该稳定子系统用传递函数来表示,同样可得4个传递函数,记为 G_{1ij} (见附录),下标1代表为稳定子系统部分,转化为传递函数后,控制器输出的供油量为:

$$W_{fc}(s) = W_{fc11}(s) + W_{fc01}(s) + W_{fc12}(s) +$$

$$W_{fc02}(s) = [G_{111}(s) + G_{011}(s)]e_{nf}(s) +$$

$$[G_{112}(s) + G_{012}(s)]e_{pit}(s) \quad (9)$$

尾喷口面积为:

$$A_{8c}(s) = A_{8c11}(s) + A_{8c01}(s) + A_{8c12}(s) +$$

$$A_{8c02}(s) = [G_{121}(s) + G_{021}(s)]e_{nf}(s) +$$

根据 $G_{111}(s)$, $G_{112}(s)$, $G_{121}(s)$, $G_{122}(s)$ 的阶跃响应曲线,用二阶系统 $G_{1ij}(s)$ 去逼近 $G_{1ij}(s)$ 。该二阶系统的第一个输入 e_{nf} 代表风扇转速的误差,第二个输入 e_{nf} 代表涡轮落压比的误差,而在中间状态风扇转速的控制目标为8880 r/min,涡轮落压比的控制目标在10左右,为此我们将 e_{nf} 的阶跃幅值定为100 r/min, e_{pit} 的阶跃幅值定义为0.1,大约都为其控制目标的1%。考虑到实际用于发动机控制时,要对控制器进行离散化处理,为了使离散化后系统具有相对简单的表达形式,我们将 $\tilde{G}_{111}(s)$ 和 $\tilde{G}_{112}(s)$ 的分母设为相同, $\tilde{G}_{121}(s)$ 和 $\tilde{G}_{122}(s)$ 的分母设为相同,其响应速度上的差异通过在分子上增加一阶微分环节来调整。通过仿真知最低可将稳定子系统将为二阶,设:

$$\tilde{G}_{111}(s) = \frac{K_{11}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$\tilde{G}_{112}(s) = \frac{K_{12}(T_1s + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$\tilde{G}_{121}(s) = \frac{K_{21}}{(T_3s + 1)(T_4s + 1)}$$

$$\tilde{G}_{122}(s) = \frac{K_{22}(T_2s + 1)}{(T_3s + 1)(T_4s + 1)} \quad (11)$$

则降阶后控制器的供油量输出为:

$$W_{fc}(s) = [\tilde{G}_{111}(s) + G_{011}(s)]e_{nf}(s) +$$

$$[\tilde{G}_{112}(s) + G_{012}(s)] e_{pit}(s) \quad (12)$$

尾喷口面积输出为:

$$A_{8c}(s) [\tilde{G}_{121}(s) + G_{021}(s)] e_{nf}(s) + [\tilde{G}_{122}(s) + G_{022}(s)] e_{pit}(s) \quad (13)$$

二阶系统 $G_{1ij}(s)$ 的静态增益即为系统 $G_{1ij}(s)$ 阶跃响应的稳态值与其输入的幅值之比,即:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_{fc11}(t)}{100} = 0.9913 \\ K_{12} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_{fc12}(t)}{0.1} = 165.3011 \\ K_{21} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_{8c11}(t)}{100} = -0.2063 \\ K_{22} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_{8c12}(t)}{0.1} = 368.3784 \end{aligned} \quad (14)$$

二阶系统时间常数 T_1, T_2, T_3, T_4 可以利用遗传算法来求得。

4 用遗传算法确定二阶系统的时间常数

遗传算法是基于仿生物进化思想而得出的一种自适应启发式全局搜索算法。它通过选择、交叉、变异^[13]等基本遗传运算操作组成循环的进化过程来寻找全局最优解。

设计过程中采取 10 进制浮点数编码的形式,以二阶系统的时间常数,作为被优化的参数 $T_1, T_2, T_3, T_4, \tau_1, \tau_2$ 种群的大小选为 100,则每一组时间常数成为种群中的一个个体。遗传算法进行控制系统降阶有效性的关键在于适应度函数的构造。

得到 K_{ij} 的值后,同样对每个个体 X 所形成的二阶系统作阶跃响应,幅值同前。分别记其输出为 $W_{fc11}, W_{fc12}, A_{8c11}, A_{8c12}$,则适应度函数可定义为:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_0^{\infty} [W_{fc11}(t) - W_{fc11}(t)] dt + \\ &\int_0^{\infty} [W_{fc12}(t) - W_{fc12}(t)] dt \cdot \alpha_1 + \\ &\int_0^{\infty} [A_{8c11}(t) - A_{8c11}(t)] dt \cdot \alpha_2 + \\ &\int_0^{\infty} [A_{8c12}(t) - A_{8c12}(t)] dt \cdot \alpha_3 \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\alpha_m (m=1, 2, 3)$ 是为了使适应度不受变量值域的影响并使相加各项具有相同的量纲而引入的比例系数。

$$\alpha_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_{fc11}(t)}{W_{fc12}(t)}, \alpha_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_{fc11}(t)}{A_{8c11}(t)},$$

$$\alpha_3 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_{fc11}(t)}{A_{8c12}(t)} \quad (16)$$

评价个体 X 性能优劣的最优指标定义为适应度函数的倒数 $f_x = 1/J_x$ 。个体的最优指标的值越大,说明个体所形成的二阶系统与未降阶的目标系统越接近,个体越符合要求。经过 500 代的进化,得到最优个体 X_{best} 为:

$$X_{best} = [T_1, T_2, T_3, T_4, \tau_1, \tau_2] = [0.0045, 0.061, 0.0091, 0.0091, 0.015, 0.017] (\text{秒})$$

则二阶系统的传递函数为:

$$\begin{aligned} G_{111}(s) &= \frac{0.9913}{(0.0045s + 1)(0.061s + 1)} \\ G_{112}(s) &= \frac{165.3011(0.015s + 1)}{(0.0045s + 1)(0.061s + 1)} \\ G_{21}(s) &= \frac{-0.2063}{(0.00907s + 1)(0.00909s + 1)} \\ G_{22}(s) &= \frac{368.3784(0.017s + 1)}{(0.00907s + 1)(0.00909s + 1)} \end{aligned}$$

其阶跃响应如图 1。为了便于比较,图 1 中也给出了采用文献[8]中降阶方法所得稳定子系统部分的降阶模型的阶跃响应曲线。则降阶后系统的传递函数:

$$\begin{aligned} G_{ij}(s) &= G_{0ij}(s) + G_{1ij}(s) \\ G_{11}(s) &= \frac{0.0011s^2 + 1.243s + 3.8542}{0.0003s^2 + 0.0652s + s} \\ G_{12}(s) &= \frac{2.473s^2 + 161.9s - 51.4025}{0.0003s^2 + 0.0652s + s} \\ G_{21}(s) &= \frac{-0.0001s^2 - 0.2237s - 0.95895}{0.0001s^2 + 0.0182s + s} \\ G_{22}(s) &= \frac{6.46s^2 + 402s + 1850.8465}{0.0001s^2 + 0.0182s + s} \end{aligned}$$

5 仿真研究

5.1 稳定子系统降阶仿真

图 1(a) 为当系统输入 $[e_{nf} \quad e_{pit}]^T = [100 \text{ r/min} \quad 0.01]^T$ 时,供油量 W_{fc} 的响应曲线,图 1(b) 为相同输入下尾喷口面积 A_{8c} 的响应曲线,其中曲线 ①代表稳定子系统 (A_1, B_1, C_1) 的阶跃响应曲线,曲线 ②代表对稳定子系统采用输出拟形方法降阶后 2 阶系统的阶跃响应曲线,曲线 ③代表采用文献[8]SFMOR 方法将稳定子系统降阶为 4 阶系统时系统的阶跃响应曲线(若降的阶次更低则其阶跃响应曲线与原系统相差更远)。

5.2 闭环系统阶跃响应曲线

为了研究降阶前后闭环系统阶跃响应的异同,将未降阶控制器及降阶后控制器(合并积分环

节和降阶稳定子系统后的控制器)与被控对象组成闭环控制系统,对转速回路和压比回路作幅值为 $[N_f \quad Pit]^T = [100 \text{ r/min} \quad 0.1]$ 的阶跃,阶跃响应如图 2。其中曲线 ①代表未降阶闭环系统的阶跃响应曲线,曲线 ②代表采用输出拟形方法降阶后闭环系统的阶跃响应曲线,曲线 ③代表采用文献[8]SFMOR 方法将控制器降为 6 阶时闭环系统的阶跃响应曲线。

从图 1 和图 2 的仿真曲线中可以看出,本文所提出的输出拟形降阶方法成功的将原控制器从 8 阶降为 3 阶,不但比文献[8]中方法将控制器阶次降得更低并取得了更好的降阶和控制效果。

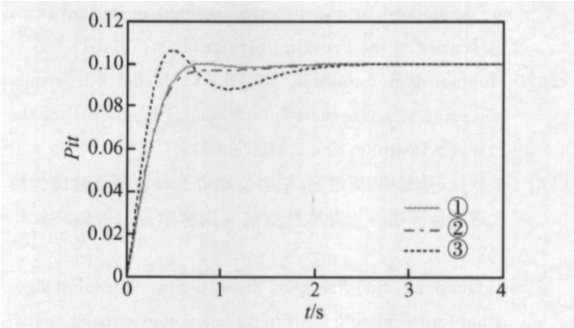


图 2 (b) P_{it} 回路阶跃响应曲线

Fig. 2 P_{it} loop step response

6 结 论

本文针对高阶控制器提出一种基于优化输出拟形的控制器降阶方法。降阶过程中将原系统分为稳定子系统部分和积分环节部分,利用遗传算法,用低阶系统去逼近稳定子系统使二者具有相近的阶跃响应,最后将低阶系统和不稳定子系统合并完成降阶过程。以航空发动机控制器为例的仿真表明,降阶后的系统和原系统具有相近的动态性能和相同的稳态性能,证明了本方法的有效性。本方法同样适用于其他控制器及模型的降阶。

参考文献:

[1] Moore B C. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction[J]. IEEE Trans. Automat. Contr.,1981, AC-26(1):17-31.

[2] Safonov M G, Chiang R Y. A schur method for balanced truncation model reduction [J]. IEEE, Trans. Automat. Contr.,1989, AC-34(7):729-733.

[3] Tatjana, Stykel. Gramian-based model reduction for descriptor systems[J]. Mathematics of Control, Signals, and Systems,2004,16: 297-319.

[4] Fuchen Han, Taofang Hai. Nonconvex stochastic optimization for model reduction [J]. Journal of Global Optimization,2002, 23:359-372.

[5] Diab M, Liu W Q, Sreeram V. Optimal model reduction with a frequency weighted extension [J]. Dynamics and Control,2000, 10:255-276.

[6] Xie Li-hua, Zhang Ci-shen, Li Luo-wen. A gradient flow approach to optimal model reduction of discrete-time periodic systems[J]. Journal of Global Optimization,2002, 23: 373-399.

[7] 杨刚.多变量鲁棒控制在航空发动机中的应用研究与实验验证[R]. 南京:南京航空航天大学,2004.

[8] Yang Gang, Sun Jian-guo. Reduced order H_∞/LTR method for aeroengine control system[J]. Chinese Journal of Aeronautics,2004, 17(3):129-135.

[9] Nagar S K, Singh S K. An algorithmic approach for sys-

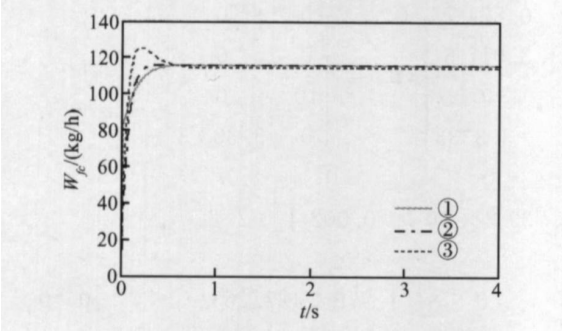


图 1 (a) W_{fc} 阶跃响应曲线

Fig. 1 (a) W_{fc} step response

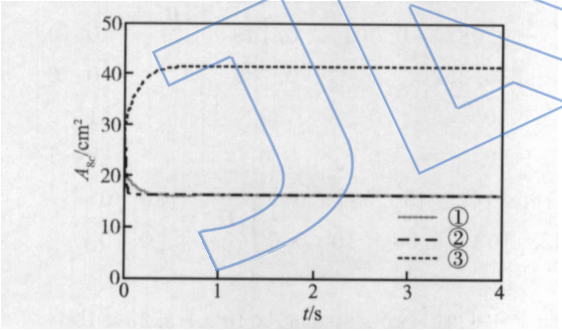


图 1 (b) A_{8c} 阶跃响应曲线

Fig. 1 (b) A_{8c} step response

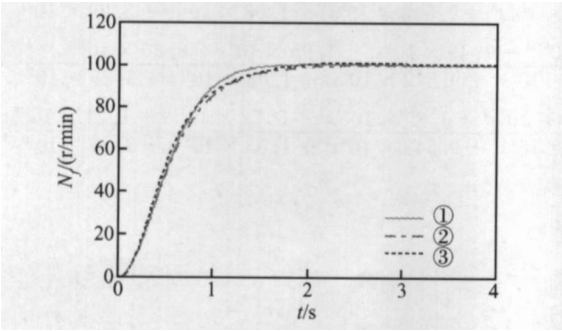


图 2 (a) N_f 回路阶跃响应曲线

Fig. 2 (a) N_f loop step response

- tem decomposition and balanced realized model reduction [J]. Journal of the Franklin Institute, 2004, 341: 615-630.
- [10] Mukherjee S, Satakshib, Mittal R C. Model order reduction using response-matching technique[J]. Journal of the Franklin Institute, 2005, 342: 503-519.
- [11] 李秋红, 孙健国, 周继超. 航空发动机 PID 控制参数优化的改进遗传算法[J]. 南京航空航天大学学报, 2006, 38(2): 162-165.
- Li Qiu-hong, Sun Jian-guo, Zhou Ji-chao. Improved algorithm for calculating GA fitness function of aeroengine PID controller parameter optimization[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2006, 38(2): 162-165.
- [12] 冯正平, 孙健国, 黄金泉, 等. 一种建立航空发动机状态变量模型的新方法[J]. 航空动力学报, 1998, 13(4): 435-438.
- Feng Zheng-ping, Sun Jian-guo, Huang Jin-quan, et al. A new method for establishing a state variable model of aero-engine[J]. Journal of Aerospace Power, 1998, 13(4): 435-438.
- [13] 张明君, 张化光. 基于遗传算法优化的神经网络 PID 控制器[J]. 吉林大学学报(工学版), 2005, 35(1): 91-96.
- Zhang Ming-jun, Zhang Hua-guang. Neural network PID controller optimized by GA[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2005, 35(1): 91-96.

附录： 被控对象矩阵

$$A_p = \begin{bmatrix} -6.5086 & 3.6541 & 0.6852 & 0.8747 \\ 0.2328 & -3.1057 & 1.8408 & 3.0176 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.3333 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10 & 0 \\ 0 & 3.3333 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0007 & 0.0014 & 4.7392 \times 10^{-5} & 0.0024 \end{bmatrix}$$

控制器矩阵：

$$A_c = \begin{bmatrix} -7.754 & 3.066 & 0.665 & -0.168 & 0 & 0 & 1.979 & 427.263 \\ -1.998 & -4.188 & 1.803 & 1.098 & 0 & 0 & 2.754 & 786.660 \\ -6.427 & -0.916 & -10.032 & -1.625 & 51908.28 & 0 & 6.869 & 665.752 \\ 1.518 & -1.835 & -0.063 & -6.588 & 0 & 8656.667 & -0.632 & 1333.425 \\ -0.046 & -0.077 & -0.497 & -0.003 & -227.257 & -0.087 & 0.001 & 0.149 \\ -0.010 & -0.022 & 0 & -3.064 & -0.086 & -230.252 & 0 & 0.789 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 231.617 & 400.537 & 2582.249 & 11.999 & 1.18 \times 10^6 & 450.532 & 0 & 0 \\ 28.788 & 54.188 & 0.975 & 7952.251 & 223.103 & 5.98 \times 10^5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

稳定子系统传递函数

$$G_{111}(s) = \frac{W_{fc11}(s)}{e_{Nf}(s)} = \frac{-3.85s^5 + 1.90 \times 10^4 s^4 + 4.91 \times 10^6 s^3 + 6.31 \times 10^8 s^2 + 8.66 \times 10^9 s + 3.27 \times 10^{10}}{s^6 + 486.07s^5 + 1.18 \times 10^5 s^4 + 1.47 \times 10^7 s^3 + 9.542 \times 10^8 s^2 + 1.03 \times 10^{10} s + 3.29 \times 10^{10}}$$

$$G_{112}(s) = \frac{W_{fc12}(s)}{e_{Pit}(s)} = \frac{51.40s^5 + 2.35 \times 10^6 s^4 + 5.92 \times 10^8 s^3 + 7.43 \times 10^{10} s^2 + 1.25 \times 10^{12} s + 5.45 \times 10^{12}}{s^6 + 486.07s^5 + 1.18 \times 10^5 s^4 + 1.47 \times 10^7 s^3 + 9.542 \times 10^8 s^2 + 1.03 \times 10^{10} s + 3.29 \times 10^{10}}$$

$$G_{121}(s) = \frac{A_{8c11}(s)}{e_{Nf}(s)} = \frac{0.96s^5 - 4.5 \times 10^3 s^4 - 1.16 \times 10^6 s^3 - 1.49 \times 10^8 s^2 - 1.95 \times 10^9 s - 6.80 \times 10^{10}}{s^6 + 486.07s^5 + 1.18 \times 10^5 s^4 + 1.47 \times 10^7 s^3 + 9.542 \times 10^8 s^2 + 1.03 \times 10^{10} s + 3.29 \times 10^{10}}$$

$$G_{122}(s) = \frac{A_{8c12}(s)}{e_{Pit}(s)} = \frac{-1.85 \times 10^3 s^5 + 1.02 \times 10^7 s^4 + 2.60 \times 10^9 s^3 + 3.30 \times 10^{11} s^2 + 3.72 \times 10^{12} s + 1.21 \times 10^{13}}{s^6 + 486.07s^5 + 1.18 \times 10^5 s^4 + 1.47 \times 10^7 s^3 + 9.542 \times 10^8 s^2 + 1.03 \times 10^{10} s + 3.29 \times 10^{10}}$$